Probabilidad de eventos compuestos

Antes de comenzar, debemos aclarar que en matemáticas y en particular en probabilidad trabajamos con la lógica de la O incluyente, es decir que al referirnos a dos características o más, puede ocurrir que se satisfagan 1, 2 o más. Por ejemplo, esto sucede cuando decimos, "debe ser estudiante o trabajador", y debemos entender que puede reunir 1 o inclusive las dos características.

Podemos decir que la palabra "o" la podemos simbolizar por $\cup$, que en la lógica de conjuntos representa la unión. La "y" la podemos simbolizar por $\cap$, que en la lógica de conjuntos representa la intersección. Y, la palabra "no", la podemos simbolizar por $\bar{A},\ A'\ o\ A^c$, que en la lógica de conjuntos representa el complemento y denota el que no ocurra A.

La probabilidad de la unión de dos eventos puede obtenerse por medio de la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Ejemplo: En una evaluación estudiantil del personal docente, V es el evento que un profesor es muy capaz en su área, D es el evento de que aplica pruebas difíciles y R es el evento de que califica en forma estricta.

Enuncia con palabras las probabilidades que se expresan como:

a) $P(\bar{D})$ probabilidad de que el profesor **NO** aplique pruebas difíciles

b) $P(D \cup R)$ probabilidad de que el profesor aplique pruebas difíciles **o** de que califique de forma estricta

c) $P(\bar{V} \cap \bar{R})$ probabilidad de que el profesor **NO** sea capaz en su área **y NO** califique de forma estricta

d) $P(V \cap R)$ probabilidad de que el profesor sea capaz en su área **y** califique de forma estricta

¿Cómo representarías los siguientes enunciados?

a) No califique en forma estricta. $P(\bar{R})$

b) No aplique pruebas difíciles, pero califique en forma estricta. $P(D^c \cap R)$

Ejercicio

Un profesor realizó una encuesta a todos sus alumnos del CCH Naucalpan para obtener la siguiente información referente al tipo de persona que dicen ser (tranquilo, estudioso o inteligente):

- 20 dicen ser tranquilos, pero no son ni estudiosos ni inteligentes.
- 15 dicen ser tranquilos y estudiosos, pero no inteligentes.
- 5 dicen ser tranquilos, estudiosos e inteligentes.
- 20 dicen ser estudiosos e inteligentes, pero no tranquilos.
- 10 dicen no tener ninguna de esas características.

- 55 dicen tener la característica de ser estudioso (no se especifica que tengan esta característica únicamente).
- 38 dicen tener la característica de ser inteligentes (no se especifica que tengan esta característica únicamente).
- 15 dicen ser tranquilos e inteligentes (no se especifica que tengan esas dos características nada más).

Vamos a representar a los siguientes eventos como:

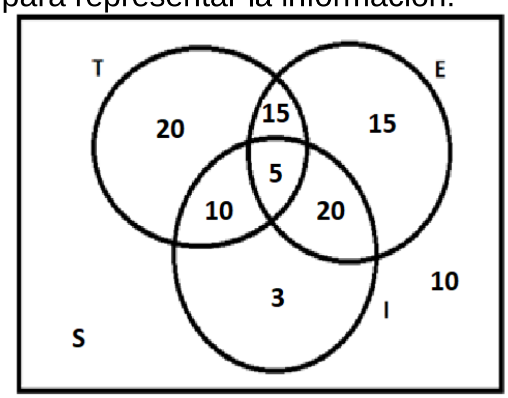
$$I = \{alumno\ inteligente\}$$
$$T = \{alumno\ tranquilo\}$$
$$E = \{alumno\ estudioso\}$$

Para indicar el evento "el alumno es inteligente y estudioso" escribimos $I \cap E$, usando el símbolo de la intersección de conjuntos. Entonces, ¿cómo indicarías que el alumno tiene las tres características? $I \cap E \cap T$

Para simbolizar el evento "el alumno al menos una de las tres características la tiene" escribimos $I \cup T \cup E$, usando el símbolo de la unión de conjuntos.

¿Cómo simbolizas que "el alumno al menos tiene una de estas dos características, Inteligente o Estudioso? $I \cup E$

Retomemos la información que se proporciona, si el profesor consideró a todos sus alumnos, ¿cuántos tiene? Para responder a la pregunta anterior, debemos pensar que algunos alumnos fueron considerados dos o inclusive tres veces, lo cual podría dificultar dar una respuesta. Para ello podemos recurrir a un diagrama de Venn, dicho esquema servirá para representar la información:



Observa en el esquema que un círculo representa al evento T, otro al evento I y otro al evento E. ¿Qué representa que no estén separados los círculos? Representa que existen alumnos con dos o más características ¿En qué región del rectángulo, representarías a los 10 alumnos que no tienen ninguna característica? Afuera de todos los círculos

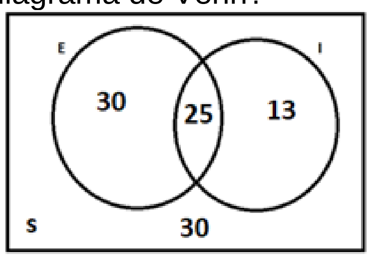
Uno de los datos que se nos proporcionan como información, es que 55 dicen tener la característica de ser estudioso (nota que no se especifica que tengan esta característica únicamente), lo cual quiere decir que dentro del círculo que representa al evento E, debe de representar en total a 55 alumnos.

¿Cuántos alumnos tiene el profesor? **98**

Utilizando el diagrama de Venn, el cual fue de gran ayuda para saber el TOTAL de alumnos del profesor, obtén las siguientes probabilidades al seleccionar al azar a un alumno:

a) La probabilidad de que sea tranquilo $P(T) = 50/98$
b) La probabilidad de que no sea estudioso $P(E) = 43/98$
c) La probabilidad de que al menos tenga una de las tres características $P(T \cup E \cup I) = 88/98$
d) La probabilidad de que no tenga ninguna de esas tres características $P(T^c \cap E^c \cap I^c) = 10/98$
e) $P(T \cup E) = 85/98$
f) $P(\bar{T} \cap E) = 35/98$

Ya sabemos cuántos alumnos tiene el profesor, y consideremos que la característica de ser tranquilo no importa, ¿cómo quedaría representada la información por medio de un diagrama de Venn?



La información del diagrama anterior, la puedes representar por medio de una tabla de contingencia

	I	$\bar{I}$	
E	25	30	**55**
$\bar{E}$	13	30	**43**
	38	**60**	**98**

Elabora una tabla de doble entrada para representar I y T para que practiques

Probabilidad condicional

Considera la siguiente situación hipotética:

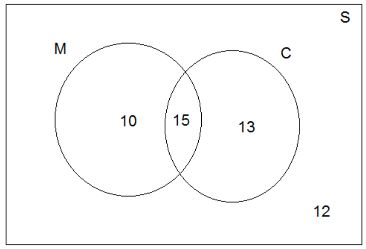
"La calificación de cada uno de los 50 estudiantes (35 son mujeres), será reprobatoria excepto 1. La persona acreedora de esa calificación aprobatoria será seleccionada al azar"

Ana Gabriela es una integrante de ese grupo, ¿cuál es la probabilidad de que sea la acreedora de la calificación aprobatoria? $1/50$. Pero, si la persona que apruebe tiene que ser mujer ¿cuál es la probabilidad de que apruebe Ana Gabriela **dada** esta condición? $1/35$. Bueno, te percataste que hubo una reducción del número de elementos del espacio muestral, ¿a cuántos elementos se redujo? 35.

Ahora consideremos otra situación:
El grupo está compuesto por 50 alumnos, de los cuales 25 de ellos utilizan el metro para llegar a la escuela, 28 combi y 15 ambos. Vamos a representar la información por medio de un diagrama de Venn, pero antes, definamos a los eventos

$$M = \{Utilice\ metro\},\ C = \{Utilice\ combi\}.$$

El diagrama de Venn:



Podemos también representar la información por medio de una tabla de doble entrada, llena los espacios correspondientes:

	M	$\overline{M}$	
C	15	13	28
$\overline{C}$	10	12	22
	25	25	50

Vamos a condicionar la situación, por ejemplo: si el evento C ocurre, es decir, ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado utilice metro **dado** que utiliza combi para llegar a la escuela? Con la condición dada, el espacio muestral que estaba constituido de 50 alumnos se redujo a, ¿cuántos alumnos? 28, pues efectivamente, ya que sólo ellos son los que reúnen la característica de utilizar combi para ir a la escuela.

Con esa condición, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra M, dado C? $15/28$
La anterior probabilidad la podemos simbolizar como $P(M\backslash C)$ y se lee "probabilidad de M dado C" y de acuerdo con el contexto de la situación significa

"probabilidad de que el alumno seleccionado utilice metro dado que utiliza combi para llegar a la escuela".

¿Cuál será la probabilidad de que **no** ocurra el evento M, dado que C ocurrió?
Es decir, $P(\overline{M}\backslash C) = 13/28$ Otro ejemplo: $P(C|M) = 15/25$

Eventos independientes

En muchas ocasiones nos encontraremos con eventos independientes, eventos que no influyen la probabilidad de otro si ocurren o no. Si un evento A y un evento B son independientes, entonces la probabilidad de que sucedan simultáneamente se obtendrá multiplicando la $P(A)$ por la $P(B)$. Esta probabilidad se simboliza por $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ y se lee "probabilidad de que sucedan A y B al mismo tiempo es igual a la probabilidad de A por la probabilidad de B".

Ejercicio.

Consideremos las ruedas de una bicicleta

Para que la bicicleta pueda servir, tanto la llanta A y B deben estar en perfectas condiciones, o de menos no deben de estar ponchadas, por lo que, si falla una, o las dos, la bicicleta estará defectuosa.

Si una llanta no tiene ningún defecto, diremos que es buena; de lo contrario, que es defectuosa. Para representar escribiremos:

$$A = \{la\ llanta\ A\ está\ buena\}$$
$$B = \{la\ llanta\ B\ está\ buena\}$$
$$\bar{A} = \{\ la\ llanta\ A\ NO\ está\ buena\}$$
$$\bar{B} = \{\ la\ llanta\ B\ NO\ está\ buena\}$$

Supongamos que el 10 por 100 de las llantas utilizadas para cierta marca de bicicletas son defectuosas. Es decir, que 90 por 100 son buenas.

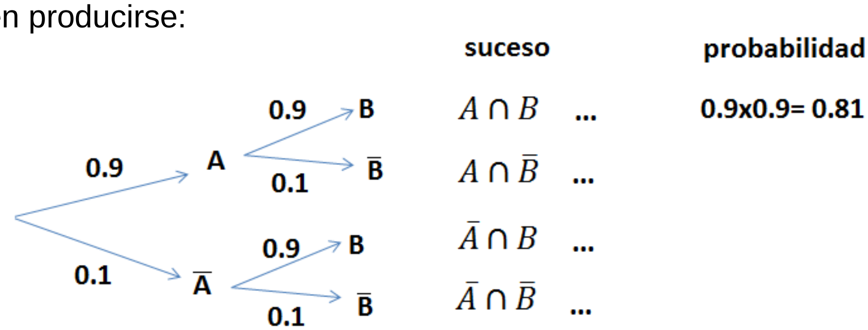
Calcula las probabilidades:

$P(A) = \frac{90}{100} = 0.9 \quad P(B) = \frac{90}{100} = 0.9 \quad P(\bar{A}) = \frac{10}{100} = 0.1 \quad P(\bar{B}) = \frac{10}{100} = 0.1$

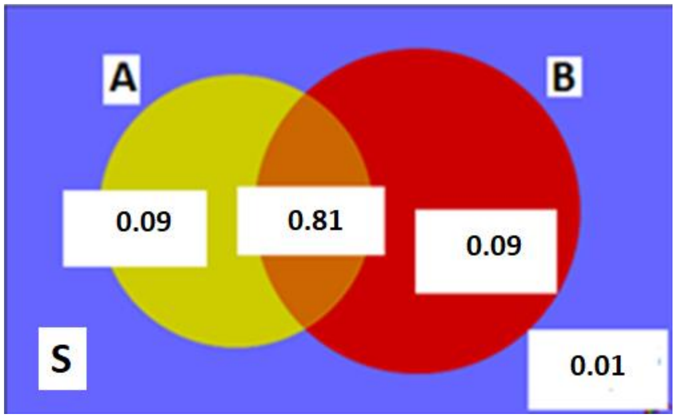
Para indicar el evento “al menos una de las llantas A o B son buenas” escribimos $A \cup B$, usando el símbolo de la unión de conjuntos. Observa el siguiente diagrama en el que representamos como conjuntos los eventos $A, \bar{A}, B$ y $\bar{B}$.

	A	$\bar{A}$
B	$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$
$\bar{B}$	$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$

Mediante el siguiente diagrama en árbol vamos a representar todas las situaciones que pueden producirse:



La representación en diagrama de Venn:



Calcula las probabilidades de los siguientes eventos:

a) Sólo A sirva.

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.09$$

b) Tanto A como B son llantas buenas.

$$P(A \cap B) = 0.81$$

c) Sólo una de las dos sirva

$$P((B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})) = 0.18$$