EJEMPLO 6 Demuestre la fórmula de reducción

■ La ecuación 7 se llama *fórmula de reducción* porque el exponente n ha sido *reducido* a $n-1$ y $n-2$.

$$\boxed{7} \qquad \int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

SOLUCIÓN Sea $\qquad u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$

Entonces $\qquad du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$

así que la integración por partes da

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

Puesto que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Como en el ejemplo 4, se resuelve esta ecuación para la integral deseada, pasando el último término del lado derecho al lado izquierdo. Así, se tiene

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

o bien,

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

□

La fórmula de reducción (7) es útil porque al usarla de manera repetida se podría expresar finalmente $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ en términos de $\int \operatorname{sen} x\,dx$ (si n es impar) o $\int (\operatorname{sen} x)^0\,dx = \int dx$ (si n es par).

7.1 EJERCICIOS

1–2 Evalúe la integral por medio de la integración por partes con las elecciones indicadas de u y dv.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$; $\quad u = \ln x,\ dv = x^2\,dx$

2. $\int \theta\cos\theta\,d\theta$; $\quad u = \theta,\ dv = \cos\theta\,d\theta$

3–32 Evalúe la integral.

3. $\int x\cos 5x\,dx$

4. $\int xe^{-x}\,dx$

5. $\int re^{r/2}\,dr$

6. $\int t\operatorname{sen} 2t\,dt$

7. $\int x^2\operatorname{sen}\pi x\,dx$

8. $\int x^2\cos mx\,dx$

9. $\int \ln(2x+1)\,dx$

10. $\int \operatorname{sen}^{-1}x\,dx$

11. $\int \arctan 4t\,dt$

12. $\int p^5\ln p\,dp$

13. $\int t\sec^2 2t\,dt$

14. $\int s\,2^s\,ds$

15. $\int (\ln x)^2\,dx$

16. $\int t\operatorname{senh} mt\,dt$

17. $\int e^{2\theta}\operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$

18. $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\,d\theta$

19. $\int_0^{\pi} t\operatorname{sen} 3t\,dt$

20. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$

21. $\int_0^1 t\cosh t\,dt$

22. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\,dy$

23. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

24. $\int_0^{\pi} x^3\cos x\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\,dy$

26. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{1/2} \cos^{-1}x\,dx$

28. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

29. $\displaystyle\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\,dr$

31. $\displaystyle\int_1^2 x^4(\ln x)^2\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t-s)\,ds$

33–38 Primero realice una sustitución y luego use la integración por partes para evaluar la integral.

33. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$

34. $\displaystyle\int t^3 e^{-t^2}\,dt$

35. $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3\cos(\theta^2)\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos t}\operatorname{sen} 2t\,dt$

37. $\displaystyle\int x\ln(1+x)\,dx$

38. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

39–42 Evalúe la integral indefinida. Ilustre, y compruebe que su respuesta es razonable, graficando tanto la función como su antiderivada (tome $C = 0$).

39. $\displaystyle\int (2x+3)e^x\,dx$

40. $\displaystyle\int x^{3/2}\ln x\,dx$

41. $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

42. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx$

43. (a) Use la fórmula de reducción del ejemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use el inciso (a) y la fórmula de reducción para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

44. (a) Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int \cos^2 x\,dx$.

(c) Use los incisos (a) y (b) para evaluar $\int \cos^4 x\,dx$.

45. (a) Use la fórmula de reducción del ejemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3 x\,dx$ y $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^5 x\,dx$.

(c) Emplee el inciso (a) para mostrar que, para potencias impares de seno,

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1}x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$$

46. Demuestre que, para potencias pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n}x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

47–50 Use la integración por partes para demostrar la fórmula de reducción.

47. $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}\,dx$

48. $\displaystyle\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

49. $\displaystyle\tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int\tan^{n-2}x\,dx \quad (n\neq 1)$

50. $\displaystyle\int\sec^n x\,dx = \frac{\tan x\sec^{n-2}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}x\,dx \quad (n\neq 1)$

51. Use el ejercicio 47 para determinar $\int(\ln x)^3\,dx$.

52. Use el ejercicio 48 para encontrar $\int x^4 e^x\,dx$.

53–54 Determine el área de la región acotada por las curvas dadas.

53. $y = xe^{-0.4x}$, $\quad y = 0$, $\quad x = 5$

54. $y = 5\ln x$, $\quad y = x\ln x$

55–56 Use una gráfica para hallar las coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. Luego encuentre (de manera aproximada) el área de la región acotada por las curvas.

55. $y = x\operatorname{sen} x$, $\quad y = (x-2)^2$

56. $y = \arctan 3x$, $\quad y = \frac{1}{2}x$

57–60 Use el método de las envolventes cilíndricas para hallar el volumen generado al rotar la región acotada por las curvas dadas respecto al eje especificado.

57. $y = \cos(\pi x/2)$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; respecto al eje y

58. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$; respecto al eje y

59. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$; respecto a $x = 1$

60. $y = e^x$, $x = 0$, $y = \pi$; respecto al eje x