con lo cual, la ecuación 8 se convierte en

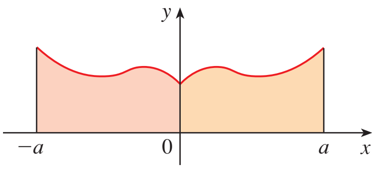
9 $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(a) Si f es par, entonces $f(-u) = f(u)$, de esa manera la ecuación 9 da

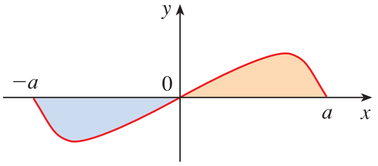
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(b) Si f es impar, entonces $f(-u) = -f(u)$ y la ecuación 9 da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$ □



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



(b) f impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 4

La figura 4 ilustra el teorema 7. Para el caso en que f es positiva y par, en el inciso (a) se hace ver que el área debajo de $y = f(x)$ desde $-a$ hasta a es el doble del área desde 0 hasta a, en virtud de la simetría. Recuerde que una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede expresar como el área arriba del eje x y debajo de $y = f(x)$ menos el área debajo del eje x y arriba de la curva. Por esto, en el inciso (b) se hace ver que el área es 0 porque las áreas se cancelan.

EJEMPLO 10 Dado que $f(x) = x^6 + 1$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par y, por consiguiente,

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$ □

EJEMPLO 11 Como $f(x) = (\tan x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisface $f(-x) = -f(x)$, es impar y, de este modo,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$ □

5.5 EJERCICIOS

1–6 Evalúe la integral efectuando la sustitución dada.

1. $\int e^{-x}\,dx,\ u = -x$

2. $\int x^3(2 + x^4)^5\,dx, \quad u = 2 + x^4$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \frac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta,\ u = \cos\theta$

6. $\int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx,\ u - 1/x$

7–46 Evalúe la integral indefinida.

7. $\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

8. $\int x^2(x^3 + 5)^9\,dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4}\,dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$

12. $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx$

15. $\int \operatorname{sen}\pi t\,dt$

16. $\int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$

17. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$

18. $\int \sec 2\theta \tan 2\theta\,d\theta$

19. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}\quad (a \neq 0)$

21. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\operatorname{sen}(1 + x^{3/2})\,dx$

23. $\displaystyle\int \cos\theta\,\operatorname{sen}^6\theta\,d\theta$

24. $\displaystyle\int (1+\tan\theta)^5\sec^2\theta\,d\theta$

25. $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

26. $\displaystyle\int e^{\cos t}\,\operatorname{sen} t\,dt$

27. $\displaystyle\int \frac{z^2}{\sqrt[3]{1+z^3}}\,dz$

28. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sin}^2 x}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

33. $\displaystyle\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \cot x\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1+\tan t}}$

39. $\displaystyle\int \sec^3 x\tan x\,dx$

40. $\displaystyle\int \operatorname{sen} t\,\sec^2(\cos t)\,dt$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\operatorname{sen}^{-1}x}$

42. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

46. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

47–50 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, dibujando la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

47. $\displaystyle\int x(x^2-1)^3\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

49. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$

50. $\displaystyle\int \tan^2\theta\sec^2\theta\,d\theta$

51–70 Evalúe la integral definida.

51. $\displaystyle\int_0^2 (x-1)^{25}\,dx$

52. $\displaystyle\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

55. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\,dt$

56. $\displaystyle\int_{1/6}^{1/2} \csc \pi t\,\cot \pi t\,dt$

57. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \tan^3\theta\,d\theta$

58. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

59. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

60. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\operatorname{sen} x}{1+x^6}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

62. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\,dx\quad (a>0)$

64. $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

65. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

66. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

67. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

68. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

69. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$

70. $\displaystyle\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T - \alpha)\,dt$

71–72 Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra debajo de la curva dada. Enseguida encuentre el área exacta.

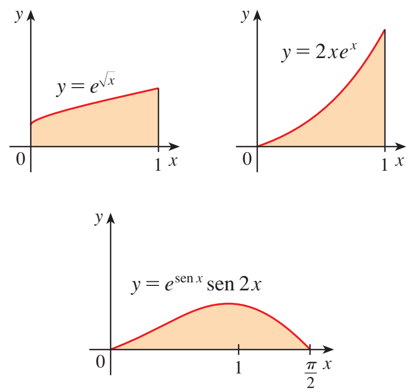
71. $y = \sqrt{2x+1},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

72. $y = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

73. Evalúe $\int_{-2}^{2} (x+3)\sqrt{4-x^2}\,dx$ al escribirla como una suma de dos integrales e interpretar una de ellas en términos de un área.

74. Evalúe $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\,dx$ al efectuar una sustitución e interpretar la integral resultante en términos de un área.

75. ¿Cuáles de las áreas siguientes son iguales? ¿Por qué?



76. Un modelo de rapidez de metabolismo fundamental, en kcal/h de un hombre joven es $R(t) = 85 - 0.18\cos(\pi t/12)$, donde t es el tiempo en horas a partir de las 5:00 AM. ¿Cuál es el metabolismo fundamenta total de este hombre, $\int_0^{24} R(t)dt$, en un periodo de 24 horas?