35–40 Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

35. $\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) dx$

36. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$

37. $\int_{-3}^{0} \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$

38. $\int_{-1}^{3} (3 - 2x)\, dx$

39. $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$

40. $\int_0^{10} |x - 5|\, dx$

41. Valorar $\int_{\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

42. Dado que $\int_0^1 3x\sqrt{x^2 + 4}\, dx = 5\sqrt{5} - 8$, ¿cuánto es $\int_1^0 3u\sqrt{u^2 + 4}\, du$?

43. En el ejemplo 2 de la sección 5.1, demostró que $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. Aplique este hecho y las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (5 - 6x^2)\, dx$.

44. Aplique las propiedades de las integrales y el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 (2e^x - 1)\, dx$.

45. Utilice el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 e^{x+2}\, dx$.

46. A partir de los resultados del ejercicio 27 y del hecho de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 1$ (según el ejercicio 25 de la sección 5.1), junto con las propiedades de las integrales, evalúe $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\, dx$.

47. Escriba como una sola integral en la forma $\int_a^b f(x)\, dx$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx + \int_2^5 f(x)\, dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\, dx$$

48. Si $\int_1^5 f(x)\, dx = 12$ y $\int_4^5 f(x)\, dx = 3.6$, encuentre $\int_1^4 f(x)\, dx$.

49. Si $\int_0^9 f(x)\, dx = 37$ y $\int_0^9 g(x)\, dx = 16$, encuentre $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\, dx$.

50. Halle $\int_0^5 f(x)\, dx$ si

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$$

51. Considere que f tiene el valor mínimo absoluto m y el valor máximo absoluto M. ¿Entre que valores se encuentra $\int_0^2 f(x)\, dx$? ¿Qué propiedad de las integrales le permite elaborar su conclusión?

52–54 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad sin evaluar las integrales.

52. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leq \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx$

53. $2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2}$

54. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\, dx \leq \dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}$

55–60 Aplique la propiedad 8 para estimar el valor de la integral.

55. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

56. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^2}\, dx$

57. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x\, dx$

58. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\, dx$

59. $\int_0^2 xe^{-x}\, dx$

60. $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\, dx$

61–62 Mediante las propiedades de las integrales, junto con los ejercicios 27 y 28, demuestre la desigualdad.

61. $\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\, dx \geq \dfrac{26}{3}$

62. $\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen} x\, dx \leq \dfrac{\pi^2}{8}$

63. Demuestre la propiedad 3 de las integrales.

64. Demuestre la propiedad 6 de las integrales.

65. Si f es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

[*Sugerencia:* $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.]

66. Utilice el resultado del ejercicio 65 para demostrar que

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} 2x\, dx \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$$

67. Sea $f(x) = 0$ si x es cualquier número racional y $f(x) = 1$ si x es cualquier número irracional. Demuestre que f no es integrable en [0, 1].

68. Sea $f(0) = 0$ y $f(x) = 1$ si $0 < x \leq 1$. Demuestre que f no es integrable en [0, 1]. [*Sugerencia*: demuestre que el primer término en la suma de Riemann, $f(x_i^*)\Delta x$ puede hacerse de manera arbitraria muy grande.]

69–70 Exprese el límite como una integral definida.

69. $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{i^4}{n^5}$ [*Sugerencia:* considere $f(x) = x^4$.]

70. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1 + (i/n)^2}$

71. Determine $\int_1^2 x^{-2}\, dx$. *Sugerencia:* elija x_i^* como la media geométrica de x_{i-1} y x_i (es decir, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) y use la identidad

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$