

EJEMPLO 11 Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN En primer lugar, note que **no puede** aplicar

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ no existe (véase el ejemplo 4, en la sección 2.2). Sin embargo, como

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

tiene, como se ilustra mediante la figura 8,

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

Sabe que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$$

Al tomar $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ y $h(x) = x^2$ en el teorema de la compresión, obtiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

□

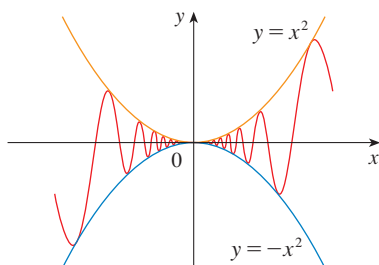


FIGURA 8
 $y = x^2 \sin(1/x)$

2.3 EJERCICIOS

1. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$$

encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 5g(x)]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)]^3$

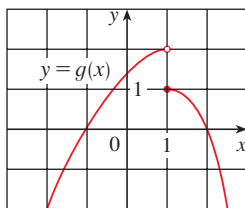
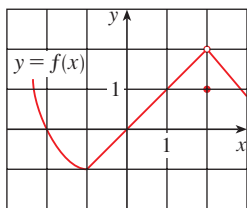
(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{h(x)}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Se dan las gráficas de f y g . Úselas para evaluar cada límite, si existe. Si el límite no existe, explique por qué.



(a) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)]$

(d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} [x^3 f(x)]$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3–9 Evalúe el límite y justifique cada etapa indicando la(s) ley(es) de los límites apropiada(s).

3. $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4}$

5. $\lim_{x \rightarrow 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

6. $\lim_{t \rightarrow -1} (t^2 + 1)^3(t + 3)^5$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4} \right)^3$

8. $\lim_{u \rightarrow -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

9. $\lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

10. (a) ¿Qué está incorrecto en la ecuación siguiente?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$